	МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждение высшего образования СОЧИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ в г. Анапе Краснодарского края

Кафедра управления, экономики и социально-гуманитарных дисциплин
/наименование кафедры-разработчика/

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
По подготовке к практическим занятиям и организации самостоятельной работы студентов по дисциплине

Б1.Б.12 Линейная алгебра

/наименование дисциплины/

38.03.01. Экономика

/код и наименование образовательной программы/

Уровень подготовки – бакалавриат

Форма обучения – очная и заочная

Анапа, 2020

Содержание

Введение

1. Цели и задачи освоения дисциплины «Линейная алгебра» является получение фундаментальных знаний, и формирование основных навыков по линейной алгебре и аналитической геометрии, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности.

Задачи изучения дисциплины «Линейная алгебра»:

– накопление необходимого запаса сведений по линейной алгебре (основные определения, теоремы, правила), а также освоение математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать экономические задачи;

– помощь в усвоении математических методов, дающих возможность изучать и прогнозировать процессы и явления из области будущей деятельности студентов;

– развитие логического и алгоритмического мышления;

– способствование формированию умений и навыков самостоятельного анализа исследования экономических проблем, развитию стремления к научному поиску путей совершенствования своей работы.

Практические занятия учебной дисциплины «Линейная алгебра» предназначены для более детальной проработки сложных тем учебного курса. Они помогают понять теоретический материал, увидеть возможность его применения для решения конкретных практических проблем и ситуаций, возникающих в работе управленцев.

Для эффективной работы необходимо иметь специальную тетрадь для выполнения практических заданий и подготовки к семинарским занятиям. Эта тетрадь по мере выполнения заданий периодически проверяется преподавателем для последующей комплексной аттестации студента по дисциплине «Линейная алгебра».

Целью практических занятий является закрепление теоретических знаний, полученных студентами на лекциях и в ходе самостоятельной работы над конкретными темами. При подготовке к практическим занятиям необходимо:

1) внимательно ознакомиться с темой занятия;
2) прочесть конспект лекции по теме, изучить рекомендованную литературу;
3) решить заданные примеры или задачи;
4) подготовить доклад или сообщение(по заданию);
5) проверить свои знания, отвечая на вопросы для самопроверки.

При подготовке к занятию студенту рекомендуется изучить вопросы, которые выносятся на обсуждение на занятии и вопросы для самостоятельного изучения по данной теме, выполнить домашнее задание, оформить словарь понятий. По желанию подготовить реферат или доклад.

Эффективность усвоения студентами дисциплины «Линейная алгебра» обеспечивается системой текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется, главным образом, в ходе проведения, практических занятий по соответствующим темам и обеспечивает проверку работы каждого студента по усвоению знаний, приобретению умений. Итоговый контроль, согласно учебному плану, осуществляется посредством экзамена по итогам обучения в течение семестра.

Планы групповых занятий

Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами

Цель: углубление и закрепление знаний о матрицах и операциях над ними

Расчетно-практическое занятие

Теоретический опрос

1) Матрицы.
2) Определение, примеры.
3) Операции над матрицами, особенности алгебры матриц.
4) Матричный полином.
5) Основные свойства операций над матрицами.
6) Некоммутативность умножения матриц.
7) Транспонирование матриц.

Расчетное задание «Операции с матрицами. Использование приложения MS Excel при осуществлении операций с матрицами»

Тема 2. Определитель матрицы. Миноры

Цель: углубление и закрепление знаний об определителях матриц

Расчетно-практическое занятие

Теоретический опрос

1) Определители квадратных матриц: определение и основные свойства.
2) Определитель матрицы 2, 3-го порядка. Правило «треугольников» (правило Звезды).
3) Перестановки.
4) Общая формула для вычисления определителей n-го порядка.
5) Миноры и алгебраические дополнения.
6) Теорема Лапласа.

Расчетное задание «Расчет Определителей, миноров и алгебраических дополнений. Использование приложения MS Excel при расчете характеристик матриц».

Тема 3. Ранг матрицы

Цель: углубление и закрепление знаний о ранге матрицы

Расчетно-практическое занятие

Теоретический опрос

1) Ранг матрицы.
2) Базисный минор матрицы.
3) Теорема о ранге матрицы и ее следствия.
4) Нахождение ранга ступенчатой матрицы.
5) Нахождение ранга расширенной матрицы системы линейных уравнений.
6) Теорема Кронекера-Капелли.

Расчетное задание «Определение ранга матрицы»

Тема 4. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

Цель: углубление и закрепление знаний о системах линейных уравнений. Метод Гаусса

Расчетно-практическое занятие

Теоретический опрос

1) Системы линейных уравнений: определение, примеры.
2) Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность.
3) Частные и общее решения.
4) Эквивалентность систем, элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем.

5) Метод исключения неизвестных (метод Гаусса).

Расчетное задание «Решение систем линейных уравнений»

Тема 5. Комплексные числа и многочлены

Цель: углубление и закрепление знаний о комплексных числах и многочленах

Расчетно-практическое занятие

Теоретический опрос

1) Комплексные числа и многочлены.
2) Алгебра комплексных чисел.
3) Алгебраическая форма комплексных чисел.
4) Тригонометрическая форма комплексных чисел.
5) Показательная форма комплексных чисел.
6) Сложение и умножение комплексных чисел.
7) Вычитание и деление комплексных чисел.
8) Формула Муавра.
9) Основная теорема Алгебры.

Расчетное задание «Операции с комплексными числами»

Методические рекомендации по подготовке к семинару

Подготовка к практическому занятию начинается с изучения плана и рекомендованной литературы. Хороший конспект лекций без сомнения будет важным подспорьем при подготовке к практическому занятию. В соответствии с планом семинара бакалавры готовят специальные выступления по главным вопросам – эссе или рефераты. Эссе (реферат) представляет собой устное, либо письменное сообщение по определенной теме, основанное на анализе литературы. Кроме предложенной тематики эссе (рефератов), они могут быть написаны в форме «библиографического обзора» или «библиографического анализа» по определенной теме.

После обсуждения на семинаре рефераты должным образом оформляются, рецензируются преподавателем и рассматриваются в качестве начального этапа научно-исследовательской работы.

Работа на семинаре заключается в активном обсуждении учебных проблем, участии в дискуссии, они должны учиться задавать вопросы и отвечать на них, анализировать выступления товарищей. Важной задачей является приобретения навыков работы на различных формах семинарских занятий: «круглого стола», «деловой (ролевой) игры», «экспертной оценки» и т.д.

В ходе семинарских занятий осуществляется текущий контроль качества знаний.

Чтобы раскрыть содержание темы доклада необходимо изучить литературу, выделить и сформулировать проблему, которая будет освещаться в докладе, разработать план изложения темы, сформулировать основные выводы. Доклады по проблемным вопросам, изучаемым в ходе семинаров, представляются устно. Желательно доклады рассказывать, а не читать. Приветствуется фиксация основных выводов по докладу на доске. Доклады оцениваются преподавателем, при этом учитывается содержание доклада, форма представления и интерес к докладу со стороны аудитории.

Задание 1.Электронное конспектирование с комментариями (анализ текста)

Рекомендации к выполнению: электронное конспектирование. Особенности электронного конспектирования и требования к конспекту

Важнейшей разновидностью аналитико-синтетической переработки документов является конспектирование письменных источников информации, в том числе в их электронном варианте. В современном потоке научно-технической информации доля этих источников неуклонно возрастает, и обработка их имеет свои специфические особенности по сравнению с традиционными способами конспектирования. Компьютерное конспектирование научно-технических текстов является частью более широкой и чрезвычайно важной проблемы – проблемы моделирования процессов, понимания, алгоритмизации обработки сообщений (текстов) с применением маркеров для цветовой разметки текста, ключевых слов и др.

На этапе создания массива первичных документов необходимо четко сформулировать тему (название) подготавливаемого первичного документа (в нашем случае – обзора) и определить цель документа: на какие вопросы он должен ответить (какие вопросы должны быть освещены, чтобы достичь поставленной цели). Формулируя ответы на эти вопросы, мы получим предварительное оглавление (содержание, структуру) документа.

Рекомендации по составлению конспекта

1. Определите цель составления конспекта.
2. Читая изучаемый материал в электронном виде в первый раз, разделите его на основные смысловые части, выделите главные мысли, сформулируйте выводы.
3. Если составляете план-конспект, сформулируйте названия пунктов и определите информацию, которую следует включить в план-конспект для раскрытия пунктов плана.
4. Наиболее существенные положения изучаемого материала (тезисы) последовательно и кратко излагайте своими словами или приводите в виде цитат.
5. Включайте в конспект не только основные положения, но и обосновывающие их выводы, конкретные факты и примеры (без подробного описания).
6. Составляя конспект, записывайте отдельные слова сокращённо, выписывайте только ключевые слова, делайте ссылки на страницы конспектируемой работы, применяйте условные обозначения.
7. Чтобы форма конспекта отражала его содержание, располагайте абзацы «ступеньками», подобно пунктам и подпунктам плана, применяйте разнообразные способы подчеркивания, используйте карандаши и ручки разного цвета.
8. Отмечайте непонятные места, новые слова, имена, даты.
9. Наведите справки о лицах, событиях, упомянутых в тексте. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля.
10. При конспектировании надо стараться выразить авторскую мысль своими словами. Стремитесь к тому, чтобы один абзац авторского текста был передан при конспектировании одним, максимум двумя предложениями.

Форма отчета: Конспект в электронном формате. Письменная работа.

Задания для самостоятельной работы должны выполняться в рабочих тетрадях в письменном виде и сдаваться преподавателю по первому требованию. Основными формами поощрения за добросовестную самостоятельную (внеаудиторную) работу студента является учет его внеаудиторной работы, а также освобождение на зачете от ответа на вопросы, по которым его самостоятельная работа была ранее оценена преподавателем на "отлично".

Внеаудиторная самостоятельная работа студента оказывает важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий

Тестирование

Тестирование является одним из основных средств формального контроля качества обучения. Это метод, основанный на стандартизированных заданиях, которые позволяют измерить психофизиологические и личностные характеристики, а также знания, умения и навыки испытуемого.

Тестовый метод контроля качества обучения имеет ряд несомненных преимуществам перед другими педагогическими методами контроля: высокая научная обоснованность теста; технологичность; точность измерений; наличие одинаковых для всех испытуемых правил проведения испытаний и правил интерпретации их результатов; хорошая сочетаемость метода с современными образовательными технологиями. Основные принципы тестирования следующие:

− связь с целями обучения - цели тестирования должны отвечать критериям социальной полезности и значимости, научной корректности и общественной поддержки;

− объективность - использование в педагогических измерениях этого принципа призвано не допустить субъективизма и предвзятости в процессе этих измерений;

− справедливость и гласность - одинаково доброжелательное отношение ко всем обучающимся, открытость всех этапов процесса измерений, своевременность ознакомления обучающихся с результатами измерений;

− систематичность - систематичность тестирований и самопроверок каждого учебного модуля, раздела и каждой темы; важным аспектом данного принципа является требование репрезентативного представления содержания учебного курса в содержании теста;

− гуманность и этичность - тестовые задания и процедура тестирования должны исключать нанесение какого-либо вреда обучающимся, не допускать ущемления их по национальному, этническому, материальному, расовому, территориальному, культурному и другим признакам;

Важнейшим является принцип, в соответствии с которым тесты должны быть построены по методике, обеспечивающей выполнение требований соответствующего государственного образовательного стандарта. К принципам тестирования примыкают принципы построения тестовых заданий, включающие в себя следующие принципы:

− коллегиальная подготовка тестовых заданий - позволяет существенно уменьшить важнейший недостаток индивидуального контроля знаний – его субъективность.

− централизованное накопление тестовых заданий - составленные и отобранные экспертами тестовые задания должны храниться в базе данных системы тестирования, обрабатываться педагогом по соответствующей дисциплине с целью устранения возможных дублирований заданий.

− унификация инструментальных средств подготовки тестовых заданий - образовательные учреждения должны использовать унифицированное программное обеспечение систем тестирования, инвариантное к предметной области.

Методические аспекты контроля знаний включают:

1. Выбор типов и трудности тестовых заданий («что контролировать?»). Набор тестовых заданий должен соответствовать цели контроля на данном этапе учебного процесса. Так на этапе восприятия, осмысления и запоминания оценивается уровень знаний обучающегося о предметной области и понимания основных положений. Способность обучающегося применять полученные знания для решения конкретных задач, требующих проявления познавательной самостоятельности, оценивается как соответствие требуемым навыкам и/или умениям.

2. Планирование процедуры контроля знаний («когда контролировать?»). Учебный процесс принято рассматривать как распределенный во времени процесс формирования требуемых знаний, навыков и умений. Соответственно этому, выделяют следующие четыре этапа контроля знаний.

1. Исходный (предварительный) контроль. Данный контроль проводится непосредственно перед обучением, имея целью оценить начальный уровень знаний обучающегося и соответственно планировать его обучение.

2. Текущий контроль. Осуществляется в ходе обучения и позволяет определить уровень усвоения обучающимся отдельных разделов учебного материала, а затем на этой основе скорректировать дальнейшее изучение предмета.

3. Рубежный контроль. Проводится по завершении определенного этапа обучения и служит цели оценки уровня знаний обучающегося по теме или разделу курса.

Итоговый контроль. Позволяет оценить знания, умения и навыки обучающегося по курсу в целом.

2. Формирование набора адекватных тестовых заданий («как контролировать?»).

Используются следующие формы тестовых заданий:

- цепные задания - задания, в которых правильный ответ на последующее задание зависит от ответа на предыдущее задание;

- тематические задания - совокупность тестовых заданий любой формы, разработанных для контроля знаний обучающихся по одной изученной теме. Задания могут быть цепными и тематическими одновременно, если их цепные свойства имеют место в рамках одной темы;

- текстовые задания - совокупность заданий, созданных для контроля знаний обучающихся конкретного учебного текста, текстовые задания удобны для проверки классификационных знаний;

- ситуационные задания - разрабатываются для проверки знаний и умений обучающихся действовать в практических, экстремальных и других ситуациях, а также для интегрального контроля уровня знаний обучающихся. Каждая из рассмотренных форм тестовых заданий имеет несколько вариантов. Например, возможны задания с выбором одного правильного ответа, с выбором одного наиболее правильного ответа и задания с выбором нескольких правильных ответов. Последний вариант является наиболее предпочтительным.

В тестовых заданиях используются четыре типа вопросов:

− закрытая форма - является наиболее распространенной и предлагает несколько альтернативных ответов на поставленный вопрос. Например, обучающемуся задается вопрос, требующий альтернативного ответа «да» или «нет», «является» или «не является», «относится» или «не относится» и т. п. Тестовое задание, содержащее вопрос в закрытой форме, включает в себя один или несколько правильных ответов и иногда называется выборочным заданием. Закрытая форма вопросов используется также в тестах-задачах с выборочными ответами. В тестовом задании в этом случае сформулированы условие задачи и все необходимые исходные данные, а в ответах представляют несколько вариантов результата решения в числовом или буквенном виде. Обучающийся должен решить задачу и показать, какой из представленных ответов он получил.

− открытая форма - вопрос в открытой форме представляет собой утверждение, которое необходимо дополнить. Данная форма может быть представлена в тестовом задании, например, в виде словесного текста, формулы (уравнения), графика, в которых пропущены существенные составляющие - части слова или буквы, условные обозначения, линии или изображения элементов схемы и, графика. Обучающийся должен по памяти вставить соответствующие элементы в указанные места («пропуски»).

− установление соответствия - в данном случае обучающемуся предлагают два списка, между элементами которых следует установить соответствие;

− установление последовательности - предполагает необходимость установить правильную последовательность предлагаемого списка слов или фраз.

Тесты по темам № 1-4 «*Матрицы. Операции над матрицами*», «*Определитель матрицы. Миноры*», «*Обратные матрицы. Метод Крамера*», «*Ранг матрицы*»

1) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Определите размер матрицы $C = B \cdot A$

а) 3×2 б) 2×2 в) 2×3 г) 3×3

2) Даны матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Какие из приведённых матриц имеют обратные?

3) Формула вычисления обратной матрицы имеет вид:

а) $A^{-1} = \frac{1}{A^*} \cdot A^T$ б) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$ в) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

(где A^T - транспонированная матрица A,
A^* - матрица состоящая из алгебраических дополнений матрицы A,
$\widetilde{A}$ - матрица состоящая из алгебраических дополнений транспонированной матрицы A).

4) Вставьте пропущенную фразу:
«При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель…».

5) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти определитель матрицы $B = A \cdot A^{-1}$.

6) Восстановить пропущенную фразу:
«Рангом матрицы называется наивысший порядок … миноров этой матрицы».

7) Сколько линейно независимых строк имеют матрицы (выберите соответствующие

пары):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ а) 0

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ б) 1

3) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ в) 2

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ г) 3

8) Выберите соответствующие друг другу утверждения:

1) $rang\, A = 0$ а) если матрица A - невырожденная;

2) $rang\, A = 1$ б) если все элементы матрицы равны нулю;

3) Ранг квадратной матрицы A равен её порядку в) если число линейно независимых строк матрицы A равно единице.

9) Вставьте пропущенную фразу:
«Обратная матрица существует и единственна только тогда, когда исходная матрица является…».

10) Внесите изменения в формулу вычисления определителя $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$\Delta = -1 \cdot A_{12} + 4 \cdot A_{22} - 2 \cdot A_{32}.$$

11) Решением матричного уравнения является (выберите соответствующие пары):

1) $X \cdot A = B$ а) $X = \dfrac{B}{A}$;

2) $A \cdot X \cdot C = B$ б) $X = A^{-1} \cdot B$;

3) $A \cdot X = B$ в) $X = B \cdot A^{-1}$;

г) $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

12) Вставьте пропущенные фразы в утверждении:
«Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда _____ ______ первой матрицы равно ________ ______ второй матрицы».

13) Восстановите свойство определителя:
«Если какая либо строка (столбец) квадратной матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель _______ ______».

14) Матрица A является невырожденной, если:

а) $|A| = 0$ б) $|A| \neq 0$ в) $|A| = 1$

15) Исправьте формулу вычисления обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

16) Укажите правильный ответ.
Ранг матрицы __________ при элементарных преобразованиях.

а) меняется б) не меняется в) неизвестно

17) Имеет ли обратную матрицу матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

а) да б) нет в) неизвестно

18) Разложите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ по подходящему ряду.

а) $\Delta = 7$ б) $\Delta = 21$ в) $\Delta = -21$

19) Соедините точки со знаком плюс в правиле вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}$$

20) Пусть матрица A размера 2×3, матрица B размера 3×2. Какие операции имеют смысл?

а) $A + B$ г) A^{-1}
б) $A \cdot B$ д) $\lambda \cdot A$ (λ - число)
в) $B \cdot A$ е) $A + E$ (E - единичная матрица)

Тесты по темам № 5, 6 «*Системы линейных уравнений. Метод Гаусса*», «*Общий метод решения системы линейных уравнений*»

1) Выберите соответствующие друг другу утверждения

1) Система уравнений называется неопределённой,	а) если все свободные члены равны нулю;
2) Система уравнений называется совместной,	б) если она имеет хотя бы одно решение;
3) Две системы уравнений называются эквивалентными,	в) если они имеют одно и то же множество решений;
4) Система уравнений называется однородной,	г) если она имеет более одного решения.

2) Система из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение, если определитель матрицы системы

а) $\Delta > 0$ б) $\Delta = 0$ в) $\Delta \neq 0$ г) $\Delta < 0$.

3) Формула Крамера имеет вид:

а) $x_i = \dfrac{\Delta}{\Delta_i}$ б) $x_j = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ в) $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$.

4) Решение системы уравнений в матричной форме $A \cdot X = B$ имеет вид:

а) $X = \dfrac{B}{A}$ б) $X = B \cdot A^{-1}$ в) $X = \dfrac{A}{B}$ г) $X = A^{-1} \cdot B$.

5) Исследовать систему линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$.

а) система несовместная в) система совместная и неопределённая

б) система однородная г) система совместная и определённая.

6) Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}.$$

7) Внесите изменения в формулировке:
«При решении системы линейных уравнений методом Крамера и методом обратной матрицы получаются различные решения, если определитель матрицы системы неравен нулю».

8) В каких случаях система из трёх линейных уравнений имеет решение с помощью метода Гаусса, но не имеет решения по формулам Крамера?

а) $rang\ A = rang\ A_p = 2$ в) $rang\ A = rang\ A_p = 1$

б) $rang\ A = 3,\ rang\ A_p = 2$ г) $rang\ A = rang\ A_p = 3$

а) $n = 2,\ k = 3$ б) $n = 1,\ k = 3$ в) $n = 3,\ k = 2$ г) $n = 3,\ k = 1$ д) $n = 2,\ k = 2$

9) Определить количество базисных (n) и количество свободных (k) переменных системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

10) Выберите соответствующие друг другу утверждения:
При решении системы n линейных уравнений с n неизвестными

1) Если $rang\ A = rang\ A_p < n$, а) то система несовместная;

2) Если $rang\ A < rang\ A_p$, б) то система совместна и является определённой;

3) Если $rang\ A = rang\ A_p = n$, в) то система совместна и является неопределённой.

11) Восстановите определение.

«Система уравнений называется определенной, если она имеет….».

12) Исправьте формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta}{\Delta}, \quad j = 1,2,...,n$$
.

13) Пусть *A, X, B* – матрицы.
Система линейных уравнений в матричной форме имеет вид
а) $AB = X$ б) $XA = B$ в) $AX = B$

14) Метод Гаусса решения системы линейных уравнений предполагает
а) вычисление обратной матрицы
б) последовательное исключение неизвестных
в) вычисление неизвестных по формулам Крамера

15) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда

а) $r(A) \neq r(A_p)$ б) $r(A) > r(A_p)$ в) $r(A) = r(A_p)$

16) Пусть система линейных уравнений совместна и ранг матрицы *A* равен *r*.
Выберите соответствующие друг другу утверждения

1) Если $r = n$, то а) система имеет множество решений;
2) Если $r < n$, то б) система имеет единственное решение;
3) Если $r > n$, то в) не имеет решений.

17) Пусть для системы двух уравнений с двумя неизвестными найдены
$\Delta = -2, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = -4$. Найдите решение системы x_1, x_2.
а) –1; 0,5 б) 2; -1 в) –1; 2

18) Пусть система линейных уравнений $AX = B$ совместна, матрица *A* имеет размерность $m \times n$, $m \neq n$, тогда система решается:

а) по формулам Крамера б) методом Гаусса в) методом обратной матрицы
19) Будет ли система совместна?
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$$

а) да б) неизвестно в) нет

20) Можно ли систему решить по формулам Крамера?
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 = -6 \end{cases}$$

а) нет б) да в) неизвестно

Тестовые задания по темам № 7, 8 «*Комплексные числа и многочлены*», «*Квадратичные формы*»

1. Запишите комплексное число Z в алгебраической и тригонометрической формах. Как связаны эти две формы записи?

2. Напишите выражение для произведения двух комплексных чисел Z_1, Z_2, заданных в тригонометрической форме; для частного от деления этих двух комплексных чисел.

3. Напишите Формулу Муавра, - выражение для возведения в степень комплексного числа Z.

4. Выпишите каноническое разложение многочлена $f(Z)$ степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами.

5 Сформулируйте Основную Теорему Алгебры для многочлена, действующего в комплексном пространстве.

2. Пусть Z – комплексная переменная, $\mathrm{a} = |a|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ – комплексное число. Для уравнения $Z^n = a$ напишите выражение для k различных его корней: $Z_k = \ldots$, k=0,1,…n-1

Выписать симметрическую матрицу квадратичной формы $\zeta = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3$ и записать квадратичную форму в матрично-векторном виде.

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям

Оценка	Требования к знаниям
отлично	От 85% до 100% правильных ответов
хорошо	От 70% до 84% правильных ответов
удовлетворительно	От 56% до 69% правильных ответов
неудовлетворительно	От 0% до 55% правильных ответов

РАЗНОУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ И КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТ

(для студентов очной и заочной форм обучения)

Рассмотрены примеры нахождения комбинаций матриц, включающие вычисление суммы, произведения матриц, умножение матрицы на число, определения обратной матрицы; определителей. Разобраны задачи на использование теоремы о ранге матрицы, решения матричных уравнений, а также систем линейных уравнений с помощью матричного метода, методов Крамера и Гаусса.

Пример 1. Умножить матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4 & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ 3\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 3\cdot(-1)+(-3)\cdot 4 & 3\cdot 1+(-3)\cdot 3 \\ 5\cdot 1+2\cdot 2 & 5\cdot(-1)+2\cdot 4 & 5\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & -15 & -6 \\ 9 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти комбинацию матриц $A\cdot B^3-2\cdot C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим матрицу

$$B^3=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Найдем произведение матриц $A\cdot B^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$

Окончательно найдем комбинацию матриц

$$A\cdot B^3-2\cdot C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы A разложением по 1-й строке, где

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot A_{11}-3\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+2A_{14}=-2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}-3\cdot(-1)^3\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-2\cdot(-5+8-8+20+2-8)+3\cdot(5+0+24-0-6+8)-$$

$$-2\cdot(-4+0-12-0+12+10)=-2\cdot 9+3\cdot 31-2\cdot 6=63.$$

Пример 4. Найти матрицу $B=13A^{-1}\cdot A^T+3E$, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение.

I-й шаг. Вычислим $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}$.

$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-10-3=-13$.

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} :

$A_{11}=5,\quad A_{21}=-3.$

$A_{12}=-1,\quad A_{22}=-2.$

Составим $A^{-1}=-\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

II-й шаг. Найдем $A^{T}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

III-й шаг. Вычислим матрицу $B=13\cdot\frac{-1}{13}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=-\begin{pmatrix}-19 & -10\\ -4 & -11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 10\\ 4 & 14\end{pmatrix}$.

Пример 5. Определить, при каких значениях параметра *a* матрица имеет обратную.

$$\begin{pmatrix}-1 & a & 2 & 2\\ 0 & -3 & -4a & 0\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение.
Матрица имеет обратную, если ее определитель не равен нулю.
Вычислим определитель матрицы разложением по 2-й строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & a & 2 & 2\\ 0 & -3 & -4a & 0\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4 & -4\end{vmatrix}=0\cdot A_{21}-3\cdot A_{22}-4a\cdot A_{23}+0\cdot A_{24}=-3\cdot(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -4\end{vmatrix}-$$

$$-4a\cdot(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=-3\cdot(8+12+8-8+8+12)+4a\cdot(-4+6a-2+4+4a-3)=$$

$$=40a^{2}-20a-120.$$

Определитель не равен нулю, если $40a^{2}-20a-120\neq 0$. Решая квадратное уравнение, найдем, что $a\neq 2$ и $a\neq-\frac{3}{2}$. Таким образом, матрица имеет обратную матрицу при всех значениях *a*, кроме $a=2$ и $a=-\frac{3}{2}$.

Пример 6. Найти максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Согласно теореме о ранге матрицы, ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы. Определим ранг матрицы, приведя ее к треугольному или ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times 2 \quad + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-3) \quad \times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 2/7 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в полученной матрице, т.е. ранг равен 3. Следовательно, максимальное число линейно независимых строк матрицы равно 3.

Пример 7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решить матричное уравнение $A \cdot B^T \cdot X = D$.

Решение. Найдем формулу вычисления матрицы X, решая матричное уравнение

$$A \cdot B^T \cdot X = D$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot B^T \cdot X = A^{-1} \cdot D$$

$$\underbrace{(B^T)^{-1} \cdot B^T}_{E} \cdot X = (B^T)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

$$X = (B^T)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

Вычисление матрицы X проведем по шагам.

<u>I–й шаг</u>. Найдем транспонированную матрицу к матрице B : $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>II-й шаг</u>. Вычислим обратную матрицу $(B^T)^{-1}$.

$\det B^T = 0 - 2 + 0 - 0 + 3 - 4 = -3.$

Определим алгебраические дополнения и составим обратную матрицу:

$A_{11}=4,\qquad A_{21}=1,\qquad A_{31}=-2,$

$A_{12}=1,\qquad A_{22}=1,\qquad A_{32}=-2,$

$A_{13}=6,\qquad A_{23}=3,\qquad A_{33}=-3.$

Таким образом, $(B^T)^{-1}=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&-2\\6&3&-3\end{pmatrix}.$

<u>III-й шаг</u>. Вычислим обратную матрицу A^{-1}.

$\det A=-2-1+0-0-0-4=-7.$

Определим алгебраические дополнения и составим обратную матрицу:

$A_{11}=-3,\qquad A_{21}=1,\qquad A_{31}=1,$

$A_{12}=1,\qquad A_{22}=2,\qquad A_{32}=-5,$

$A_{13}=-1,\qquad A_{23}=-2,\qquad A_{33}=-2.$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&2&-5\\-1&-2&-2\end{pmatrix}.$

<u>IV-й шаг</u>. Найдем матрицу X.

$$X=(B^T)^{-1}\cdot A^{-1}\cdot D=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&-2\\6&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&2&-5\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-9&10&3\\0&7&0\\-12&18&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-73\\-49\\-144\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-73/21\\-49/21\\-144/21\end{pmatrix}.$$

Пример 8. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=4,\\2x_1-x_2+4x_3=0,\\-x_1+3x_3=4.\end{cases}$$

Решение. Используем формулы Крамера $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}\quad(i=1,2,3)$.

Вычислим определители Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&4\\-1&0&3\end{vmatrix}=-3-4+0-3-6-0=-16,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&3\\0&-1&4\\4&0&3\end{vmatrix}=-12+0+16+12-0-0=16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 24 - 0 - 24 - 16 = -32\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - 4 - 8 - 0 = -16\,.$$

Согласно формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{-16} = -1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-32}{-16} = 2\,, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1.$$

Проверка:

$$-1 + 2 + 3 \cdot 1 = 4,$$
$$2 \cdot (-1) - 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$
$$1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Пример 9. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Решение линейной системы матричным методом имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу A^{-1}.

$\det A = -3 + 8 - 1 + 2 + 6 - 2 = 10.$

Определим алгебраические дополнения к элементам матрицы A и составим обратную матрицу:

$$A_{11} = 1, \qquad A_{21} = -3, \qquad A_{31} = -5,$$
$$A_{12} = -3, \qquad A_{22} = -1, \qquad A_{32} = -5,$$
$$A_{13} = 1, \qquad A_{23} = 7, \qquad A_{33} = 5.$$

Таким образом, $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$

Найдем матрицу $X = A^{-1} \cdot B = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Проверка:

$$3\cdot 0-2\cdot(-1)+1=3,$$
$$0-1+2\cdot 1=1,$$
$$-2\cdot 0+1-1=0.$$

Пример 10. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2,\\ 3x_1+x_2-3x_3=3,\\ x_1-3x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -3 & 3\\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} \times(-3) & \times(-1)\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \times(-2)\\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Последняя строка матрицы соответствует уравнению $-x_3=5$, откуда $x_3=-5$.

Вторая строка матрицы соответствует уравнению $-2x_2=-3$, откуда $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Первая строка матрицы соответствует уравнению $x_1+x_2-x_3=2$, откуда

$$x_1=-x_2+x_3+2=2-\frac{3}{2}-5=-\frac{9}{2}.$$

Таким образом решение системы $x_1=-\dfrac{9}{2},\quad x_2=\dfrac{3}{2},\quad x_3=-5.$

Проверка:

$$-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}-(-5)=2,$$
$$3\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{3}{2}-3\cdot(-5)=3,$$
$$-\frac{9}{2}-3\cdot\frac{3}{2}-2\cdot(-5)=1.$$

Пример 11. Исследовать систему методом Гаусса, в случае совместности решить ее.

$$\begin{cases} x_1-x_2-5x_3=2,\\ 2x_1-x_2+3x_3-5x_4=1,\\ 3x_1-2x_2-2x_3-5x_4=-3,\\ 7x_1-5x_2-9x_3+10x_4=8. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1\\ 3 & -2 & -2 & -5 & -3\\ 7 & -5 & -9 & 10 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{ccc} \times(-2) & \times(-3) & \times(-7)\\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 13 & -5 & -9\\ 0 & 2 & 26 & 10 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{cc} & \\ \times(-1) & \times(-2)\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система несовместна, т.к. последняя матрица показывает, что $r(A) = 3 \neq 4 = r(A_p)$
.
В самом деле, предпоследней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -6$, не имеющее решений.

Пример 12. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 9 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-2)\ \times(-3) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Т.к. ранг матрицы системы $r = 2$, а число неизвестных $n = 5$, то система имеет множество решений. За базисные переменные примем, например, x_1, x_3 (т.к. определитель из коэффициентов при них отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$), тогда остальные переменные x_2, x_4, x_5 являются свободными. Выразим базисные переменные через свободные.
Из второго уравнения системы $x_3 = 1$. Тогда из первого уравнения найдем x_1:
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$,
$x_1 = 1 + 2x_2 + x_4 - 3x_5$.
Задавая свободным переменным произвольные значения $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, найдем бесконечное множество решений системы:
$x_1 = 1 + 2c_1 + c_2 - 3c_3$; $x_2 = c_1$; $x_3 = 1$; $x_4 = c_2$; $x_5 = c_3$.

Упражнения

Найти комбинации матриц

1. $A^T \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 9 & -30 & 10 \\ -18 & 14 & 6 \\ 13 & 0 & 22 \end{pmatrix}$

2. $(A+B)\cdot(A\cdot B-2A)$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}446 & 107\\ 310 & 73\end{pmatrix}$

3. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=-\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix}38 & -16 & -2\\ 2 & -4 & 2\\ -13 & 6 & -3\end{pmatrix}$

Решить матричные уравнения

4. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 8 & 2\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-56 & 43{,}5\\ -42 & 32{,}5\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -6\end{pmatrix}\cdot 2E\cdot X=\begin{pmatrix}-5 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -4\\ -1 & -3 & 6\end{pmatrix}$.

Ответ: $X=\dfrac{1}{54}\begin{pmatrix}36 & 21 & -14\\ -27 & -18 & 12\\ -18 & -1{,}5 & -17\end{pmatrix}$

6. Вычислить определитель разложением по 2-му столбцу

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

Ответ: 10

7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}3 & 6 & -9 & 12 & 1\\ -2 & 3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 9 & 3\end{pmatrix}$.

<u>**Ответ: 4**</u>

8. При каком значении k матрица имеет обратную $\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$?

Ответ: $k\neq 1$

9. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3{,}5;\quad x_2 = -5;\quad x_3 = -2{,}5$

10. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -8. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = -1$

11. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{13}(12x_4 + 1);\quad x_2 = \frac{1}{13}(15x_4 - 2);$

$x_3 = \frac{1}{13}(20x_4 - 7)$; x_4 – свободная неизвестная

12. Исследовать однородную систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: Система является неопределенной.

$x_1 = -\frac{17}{13}x_3;\quad x_2 = \frac{16}{13}x_3$; x_3 – свободная неизвестная

13. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1;\quad x_2 = -3;\quad x_3 = 2;\quad x_4 = 1$

Критерии формирования оценок при выполнении разноуровневых заданий

Оценка «отлично» выставляется при грамотном выполнении предложенных по теме заданий, экономической интерпретации полученных результатов в виде ответа к задаче, и правильном выполнении не менее 90% предложенных заданий.

Оценка «хорошо» выставляется при правильном выполнении технических расчетов и при отсутствии интерпретации полученных результатов.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Системы линейных уравнений: определение, примеры.
2. Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность.
3. Эквивалентность систем, элементарные преобразования систем.
4. Матрицы, операции над ними и их свойства.
5. Транспонирование матриц.
6. Определитель матрицы.
7. Общая формула для вычисления определителей.
8. Свойства определителя.
9. Миноры и алгебраические дополнения, их связь с определителем матрицы.
10. Теорема Лапласа.
11. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
12. Ранг матрицы.
13. Теорема о базисном миноре.
14. Свойства ранга матрицы.
15. Метод исключения переменных Гаусса.
16. Метод Крамера.
17. Теорема Кронекера-Капелли.
18. Общее решение системы линейных уравнений. Частные решения.
19. Базисные и свободные неизвестные.
20. Однородные системы линейных уравнений.
21. Комплексные числа и многочлены.
22. Алгебраическая форма комплексных чисел.
23. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
24. Сложение и умножение комплексных чисел.
25. Вычитание и деление комплексных чисел.
26. Основная теорема Алгебры.
27. Квадратичные формы.
28. Матрично-векторный вид квадратичной формы.
29. Канонический вид квадратичной формы.
30. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы.
31. Критерий Сильвестра.

Методические рекомендации при подготовке к экзамену

Экзамен – это формы проверки знаний и навыков студентов вуза, полученных на лекциях, семинарских и практических занятиях, а также при самостоятельной работе за весь учебный курс, предусмотренный учебным планом.

Цель экзамена – проверить теоретические знания и умение применять их в практических ситуациях, в будущей профессиональной деятельности. Обязательным условием допуска студента к зачету является выполнение текущих заданий, в том числе результаты самостоятельной работы, выполнение контрольной работы, представление преподавателю результатов выполнения индивидуальных заданий (в случае работы по индивидуальному графику).

При сдаче экзамена учитываются:

1) овладение базовыми знаниями и умениями в области математического моделирования;
2) посещаемость студента в ходе семестра и его активность во время аудиторных занятий;

3) качество выполнения "срезовой" контрольной работы;
4) качество выполнения самостоятельной работы в рабочей тетради.

Положительная оценка на экзамене складывается из умения оперировать понятиями конкретного материала. Ответ должен быть развернутым и аргументированным.

В ответе особенно ценятся:

1) умение выделить главное;
2) показ связи, места данного вопроса в общей структуре дисциплины;
3) самостоятельность, способность обобщать материал не только из лекций, но и из других источников;
4) собственная точка зрения при изложении содержания вопроса;
5) умение приводить примеры из практики для иллюстрации излагаемых положений;
6) умение применять свои знания для ответа на дополнительно поставленные вопросы;
7) умение грамотно и последовательно изложить материал.

При подготовке к экзамену:

1) внимательно прочтите вопросы, предназначенные для проверки знаний на зачете или экзамене;
2) распределите темы подготовки по блокам и дням;
3) составьте план ответа на каждый вопрос;
4) не "зазубривайте" материал, достаточно выделить ключевые моменты и уловить смысл и логику материала.

При изучении основных и дополнительных источников информации в рамках ответа на вопрос особое внимание обращайте:

a) на выводы по теме, так как они содержат основные мысли и тезисы для ответа и позволяют правильно построить ответ на поставленный вопрос;
b) на схемы, рисунки, графики и другие иллюстрации, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса и лучше запоминаются;
c) на наличие в тексте словосочетаний вида "во-первых", "во-вторых", а также перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на поставленный вопрос, содержат основные тезисы ответа на вопрос.

Изучив несколько вопросов, в случае необходимости и возможности обсудите их с однокурсниками, проговорите основные положения ответа вслух. В случае затруднения при нахождении ответов на тот или иной вопрос или сомнения в правильности и полноте ответа воспользуйтесь индивидуальной консультацией и групповой консультацией перед экзаменом.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Рудык, Б. М. Линейная алгебра : учеб. пособие / Б.М. Рудык. - М. : ИНФРА-М, 2019. - 318 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004533-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1010102
2. Ржевский, С. В. Высшая математика I: линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / С.В. Ржевский. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 211 с. - ISBN 978-5-16-108269-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1065260
3. Ахметгалиева, В. Р. Математика. Линейная алгебра : учебное пособие / В. Р. Ахметгалиева, Л. Р. Галяутдинова, М. И. Галяутдинов. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2017. — 60 c. — ISBN 978-5-93916-552-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/65863.html
4. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - ISBN 978-5-9776-0258-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1015326
5. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра в примерах и задачах : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 3-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. - 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010586-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1045621

Дополнительная литература

1. Ледовская, Е. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Практикум / Ледовская Е.В. - Москва :МГАВТ, 2017. - 103 с.: ISBN. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/966765
2. Емельянова, Т. В. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие / Т. В. Емельянова, А. М. Кольчатов. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 184 c. — ISBN 978-5-4486-0331-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/74559.html
3. Расулов, К. М. Математика. Линейная алгебра: учебно-справочное пособие / Расулов К.М., Гомонов С.А.; Под ред. Расулов К.М. - Москва : Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2020. - 144 с.:- (СПО). - ISBN 978-5-91134-713-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1081982
4. Элементы линейной алгебры : учебное пособие / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, В. А. Жукова [и др.]. — Ставрополь : Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2017. — 88 c. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/76070.html

Перечень ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения учебной дисциплины

www.gks.ru
www.fedstat.ru
www.cbr.ru
http://www.worldbank.org
www.oecd.org/stat
http://www.un.org/statistics/
http://dsbb.imf.org/
http://www.ilo.org/stat/lang--en//index.htm
http://www.uis.unesco.org/ev_en.php
http://www.who.int/en/
http://www.cisstat.com/
http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/themes.